TD 8 - Algèbre homologique

Notions du cours.
- Modules, sous-modules, morphismes de R-modules.
- Groupes abéliens comme $\mathbb{Z}$-modules.
- Complexe de chaînes, morphismes entre complexes de chaînes.
- Cycles, bords, R-module d'homologie d'un complexe de chaînes.
- Suites exactes courtes et longues de R-modules, de complexes de chaînes.
- Homotopie de complexes de chaînes.
- Δ-complexes.

Complexes de chaînes.

Exercice 1 (Lemme des cinq). Considérons le diagramme commutatif de R-modules

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"'] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"'] & M_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

tel que les lignes sont exactes.

(a) Montrer que si f_1 est surjective et f_2 et f_4 sont injectives, alors f_3 est injective.

(b) Montrer que si f_5 est injective et f_2 et f_4 sont surjectives, alors f_3 est surjective.

On en déduit que si f_1, f_2, f_4, f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 l'est aussi.

Exercice 2. Soit $E\ :\ 0 \to E_n \xrightarrow{d_n} E_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} E_{n-2} \to \ldots \to E_0 \to 0$ un complexe de chaînes de $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie.

(a) Montrer que : $$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim(E_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim(H_i(E)).$$

Ce nombre est appelé caractéristique d'Euler du complexe de chaînes E et est noté $\chi(E)$.

(b) Déduire que si deux complexes bornés comme ci-dessus sont homotopes alors ils ont la même caractéristique d'Euler.

(c) En déduire qu'une suite exacte courte de complexes de chaînes de $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ satisfait la relation $\chi(E) = \chi(E') + \chi(E'')$.

Exercice 3. Considerons une suite exacte courte de groupes abéliens $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\rho} C \to 0$.

(a) Montrer que s'il existe un morphisme $r : B \to A$ tel que $r \circ i = \mathrm{Id}_A$ alors $B \simeq A \oplus C$,

(b) Montrer que s'il existe un morphisme $\sigma : C \to B$ tel que $\rho \circ \sigma = \mathrm{Id}_C$ alors $B \simeq A \oplus C$.

Dans l'un de ces cas on dit que la suite exacte se scinde. On remarquera que c'est toujours le cas si C est un groupe abélien libre.

Exercice 4. On dit qu'un complexe de chaînes $(C_\bullet, d)$ est scindé s'il existe une famille d'applications $s_n : C_n \to C_{n+1}$ telle que $d_{n+1} = d_{n+1} s_n d_{n+1}$.

(a) On suppose que le complexe $C_\bullet$ est scindé. Montrer que $C_\bullet$ est exact si et seulement si il est contractile (i.e. l'application identité $C_\bullet \to C_\bullet$ est homotope à l'application nulle).

(b) Donner un example d'un complexe de chaînes exact qui n'est pas contractile.

(c) Considérons une suite exacte de R-modules libres $C_\bullet\ :\ \cdots \to C_n \to \cdots \to C_0 \to 0$. Montrer que $C_\bullet$ est scindé.

(d) Trouver un example de suite exacte (non bornée) de R-modules libres qui n'est pas scindée.

Δ-complexes.

Le *n-simplexe standard* est le sous-ensemble Δ^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ donné par

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_j \geq 0 \ \forall j, t_0 + \dots + t_n = 1\}.$$

Etant donnés $n+1$ points $v_0, \dots, v_n$ dans $\mathbb{R}^N$ qui engendrent un espace affine de dimension n, leur enveloppe convexe

$$[v_0, \dots, v_n] = \{t_0 v_0 + \dots t_n v_n \mid t_j \geq 0, t_0 + \dots + t_n = 1\}$$

est canoniquement isomorphe à Δ^n par l'application $\phi : (t_0, \dots, t_n) \mapsto \sum_{j=0}^n t_j v_j$. Un n-simplexe est donné par cette $n+1$-uple *ordonnée* de points $[v_0, \dots, v_n]$. Un sous-ensemble $\{v_{j_0}, \dots, v_{j_k}\}$ détermine une *face* de dimension k. On considère toujours une face ordonnée de façon que $j_0 < j_1 < \dots < j_k$.
Un Δ-complexe est la donnée d'une famille de différents n_α-simplexes $\Delta_\alpha = \Delta_\alpha^{n_\alpha} = [v_0^\alpha, \dots, v_{n_\alpha}^\alpha]$, et de identifications données par des collections $\mathcal{F}_\beta$ de faces des Δ_α de dimension k_β. La réalisation du Δ-complexe est la réunion disjointe des simplexes Δ_α, quotienté par la relation d'équivalence engendrée par $\phi_i(t) \sim \phi_j(t)$ pour tout $F_i, F_j \in \mathcal{F}_\beta$ pour un certain β, où ϕ_i et ϕ_j sont les isomorphismes canoniques entre Δ^{k_β} et F_i, F_j respectivement.

Exercice 5. Donner une structure de Δ-complexe aux espaces suivants.

(a) $\mathbb{S}^2$, (b) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, (c) la bouteille de Klein, (d) la bande de Mobius,

(e) $\mathbb{RP}^2$, (f) $\mathbb{S}^n$, (g) $\mathbb{RP}^3$.

Exercice 6.

(a) Montrer que tout espace polygonal (voir TD 6) admet une structure de Δ-complexe.

(b) Montrer que tout Δ-complexe admet une structure de complexe cellulaire.

Si X est un Δ-complexe, on dénote par e_j^n les n-simplexes après identifications. On considère $\Delta_n(X)$ le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les n-simplexes $\{e_j^n\}$, c'est à dire :

$$\Delta_n(X) = \bigoplus_j \mathbb{Z} e_j^n.$$

Pour donner une structure de complexe de chaines à $\Delta_\bullet(X) = (\Delta_n(X))_n$, il faut définir les applications de bord $d_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$.
Si $[v_0, \dots, v_n]$ est un n-simplexe (pour $n \geq 1$), on définie $d_n[v_0, \dots, v_n] = \sum_{j=0}^n (-1)^j [v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n]$.

Exercice 7.
Montrer que pour tout $n \geq 1$, d_n induit un morphisme $d_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$, et que $d_{n-1} \circ d_n = 0$.

On en déduit que $(\Delta_\bullet(X), d_\bullet)$ définit un complexe de chaînes (en imposant $d_0 : \Delta_0(X) \to 0$ et $\Delta_n(X) = 0$ pour tout $n < 0$). Si X est un Δ-complexe, on dénote par $H_\bullet^\Delta(X)$ les groupes de homologie de ce complexe de chaînes.

Exercice 8. Calculer les groupes $H_n^\Delta(X)$ pour tous les Δ-complexes obtenus dans l'exercice 5.

Exercice 9. On construit un Δ-complexe de dimension trois à partir de n tétraèdres (3-simplexes) $T_1, \dots, T_n$ de la manière suivante : on identifie la face $[v_1, v_2, v_3]$ de T_i avec la face $[v_0, v_2, v_3]$ de T_{i+1} pour i considéré modulo n. On identifie également la face $[v_0, v_1, v_2]$ de T_i avec la face $[v_0, v_1, v_3]$ de T_{i+1} (toujours i considéré modulo n). Calculez les groupes d'homologie du complexe ainsi obtenu. Reconnaissez-vous un espace déjà étudié ?

Exercice 10. Calculez les groupes d'homologie du Δ-complexe suivant : Δ^n auquel toutes les faces de même dimension ont été identifiées (c'est donc un Δ-complexe qui a un seul simplexe en chaque dimension).